

COMPITO DI ARITMETICA

13 febbraio 2014

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Esercizio 1.

Sia $\mathbb{N}_{100} = \{1, 2, \dots, 100\}$. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

- a) $X = \{A \subseteq \mathbb{N}_{100} \mid \max A - \min A = 60\}$.
- b) $Y = \{f : \mathbb{N}_{100} \rightarrow \mathbb{N}_{100} \mid f(1) \cdot f(2) \cdots f(100) \not\equiv 0 \pmod{10}\}$.

Esercizio 2.

Determinare il numero di soluzioni modulo 1001 della congruenza

$$x^{101} \equiv x \pmod{1001}.$$

Esercizio 3.

Sia G un gruppo abeliano e sia k un intero maggiore di 1. Poniamo $G^k := \{g^k \mid g \in G\}$.

- a) Mostrare che G^k è un sottogruppo di G e che nel gruppo G/G^k tutti gli elementi hanno ordine finito.
- b) Sia G un gruppo ciclico di ordine n , calcolare la cardinalità di G/G^k .
- c) Dare un esempio di un gruppo G tale che $G/G^{10} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Esercizio 4.

Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $f(x) = x^4 + x + 1$.

- a) Determinare il polinomio minimo di $\frac{1}{\alpha+1}$ e di α^2 su \mathbb{Q} .
- b) Determinare il campo di spezzamento del polinomio $f(x)$ su \mathbb{F}_5 .